

مبحث: دایره

نام دبیر: مهندس سامان اسپهرم
نام دوره: نوروز
شماره جلسه: جلسه سوم
نام درس و مقطع و رشته: هندسه پایه - دوازدهم
ریاضی، فیزیک
تاریخ جلسه: ۱۴۰۲/۰۱/۰۴

نام کتاب	من در کلاس حل می کنم	خودتان حل کنید (در منزل یا کار در کلاس)
کتاب درسی		
کتاب آبی		
کتاب نوروز		

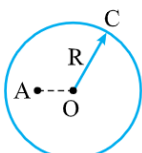


نکته برداری و خلاصه نویسی

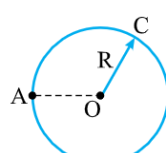
دایره: مجموعه نقاطی از صفحه را که از نقطه ثابتی واقع در همان صفحه به فاصله ثابت باشند، دایره می نامند. آن نقطه ثابت را مرکز دایره و آن فاصله ثابت را شعاع دایره می نامند. دایره ای به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O, R)$ نمایش می دهند.

یک نقطه مانند A با دایره $C(O, R)$ سه وضعیت مختلف می تواند داشته باشد:

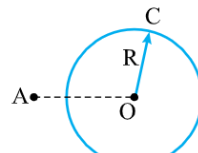
- ۱ بیرون دایره است: در این A روی دایره است: در این A درون دایره است: در این
- صورت $OA > R$ می باشد. صورت $OA = R$ می باشد. صورت $OA < R$ می باشد.



شکل (۳)



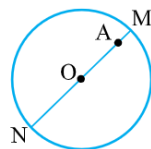
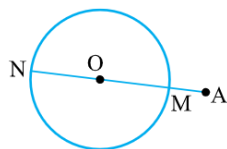
شکل (۲)



شکل (۱)

دور ترین و نزدیک ترین فاصله یک نقطه از دایره

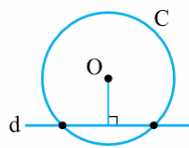
اگر A یک نقطه و $C(O, R)$ یک دایره باشد و از A به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در نقطه M و N قطع کند، آن گاه کم ترین فاصله از نقاط دایره، برابر AM و بیشترین فاصله از نقاط دایره، برابر AN است.



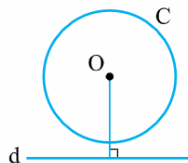
وضعیت نسبی یک خط و یک دایره

خط d و دایره $C(O, R)$ نسبت به هم، تنها یکی از سه وضعیت زیر را می توانند داشته باشند:

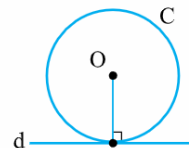
- ۱ خط d و دایره $C(O, R)$ دو نقطه مشترک دارند: در این صورت می گوییم خط با دایره متقاطع است. در این حالت فاصله مرکز دایره از خط d کمتر از شعاع دایره است. (ش ۱)
- ۲ خط d و دایره $C(O, R)$ نقطه مشترکی ندارند: در این صورت می گوییم خط، دایره را قطع نمی کند و فاصله مرکز دایره از خط d بیشتر از شعاع دایره است. (ش ۲)
- ۳ خط d و دایره $C(O, R)$ فقط در یک نقطه مشترک هستند: در این صورت می گوییم خط بر دایره مماس است. نقطه مشترک خط و دایره را نقطه تماس می نامند و پاره خطی که مرکز دایره را به نقطه تماس وصل می کند، شعاع وارد بر نقطه تماس می گویند. همیشه شعاع وارد بر نقطه تماس، بر خط مماس عمود است. در این حالت، فاصله مرکز دایره از خط مماس، برابر شعاع دایره است. (ش ۳)



شکل (۱)



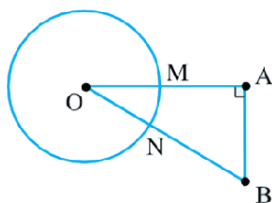
شکل (۲)



شکل (۳)



در شکل زیر، O مرکز دایره، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $AM = AB = 8$ و $NB = 10$ است. شعاع دایره کدام است؟



۶ (۱)

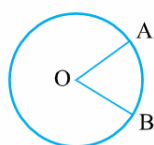
۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

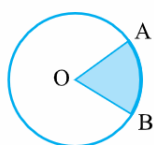
زاویه در دایره

زاویه مرکزی



زاویه‌ای را که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع دایره باشد، زاویه مرکزی می‌نامند.

اندازه هر زاویه مرکزی، برابر با کمان مقابلش می‌باشد. در شکل بالا داریم $\hat{O} = \widehat{AB}$.



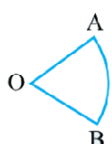
قطاع در دایره: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره محدود باشد، یک قطاع می‌نامند.

اگر شعاع دایره، R و زاویه مرکزی نظیر وتری از آن، برحسب درجه، θ باشد، آن‌گاه:

$$\text{طول کمان } AB = L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi}{180} R \theta$$

$$\text{مساحت قطاع} = S = \frac{\pi}{360} R^2 \theta$$

ولی اگر θ برحسب رادیان باشد، آن‌گاه $L_{\widehat{AB}} = R\theta$ و $S = \frac{1}{2} R^2 \theta$.



در شکل مقابل، $\widehat{AB}$ کمانی از دایره به مرکز O می‌باشد. اگر طول این کمان،

برابر π و مساحت قطاع 5π باشد، زاویه O چند درجه است؟

۷۲ (۲)

۱۸ (۱)

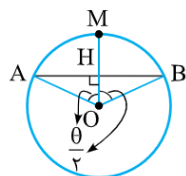
۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

چند نکته

۱ اگر در دایره‌ای، دو وتر مساوی باشند، زاویه‌های مرکزی نظیر آن دو وتر نیز مساوی هستند و برعکس.

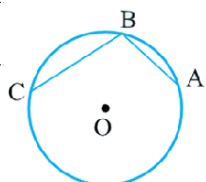
۲ خطی که از مرکز دایره بر وتری از همان دایره عمود می‌شود، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند و برعکس.



۳ اگر زاویه مرکزی مقابل به وتر AB، برابر θ باشد، آن‌گاه:

$$\text{طول وتر } AB = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

در دایره (O, R) ، طول وتر AB برابر R و طول وتر BC برابر $R\sqrt{2}$ است. طول وتر AC



چند برابر شعاع است؟ (فرض کنید $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ باشد.)

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

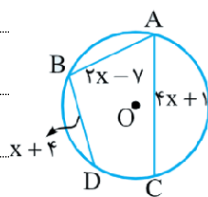
$$\frac{1 + \sqrt{3}}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (۳)$$



اگر در دایره‌ای دو وتر نابرابر باشند، وتری که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.



در شکل مقابل، فاصله وتر AB از مرکز دایره نسبت به دو وتر دیگر بیشتر است و فاصله وتر AC از مرکز دایره نسبت به دو وتر دیگر کم‌تر است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، حدود x کدام است؟

$$-8 < x < 7 \quad (2)$$

$$-8 < x < 11 \quad (1)$$

$$1 < x < 7 \quad (4)$$

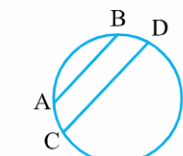
$$1 < x < 11 \quad (3)$$

زاویه محاطی

زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره و دو ضلع آن، دو وتر دایره باشد، زاویه محاطی می‌نامند. اندازه هر زاویه محاطی، نصف کمان مقابلش می‌باشد.

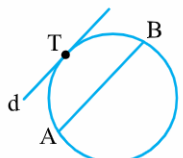
زاویه محاطی مقابل به یک قطر، زاویه قائمه است.

اگر در دایره‌ای دو وتر، موازی باشند، کمان‌های محدود به این دو وتر، برابر هستند و برعکس؛ یعنی در شکل مقابل داریم:



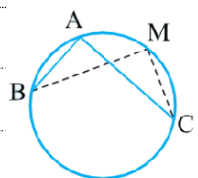
$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

اگر وتری از دایره با خطی که بر دایره مماس است، موازی باشد، کمان‌های محدود به وتر و خط مماس، با هم مساوی هستند و برعکس؛ یعنی در شکل مقابل داریم:



$$d \parallel AB \Leftrightarrow \widehat{AT} = \widehat{BT}$$

در شکل مقابل، شعاع دایره برابر R ، $AB = R$ و $AC = \sqrt{3}R$ است.



اندازه زاویه M چند درجه است؟

$$115 \quad (2)$$

$$105 \quad (1)$$

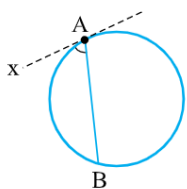
$$75 \quad (4)$$

$$90 \quad (3)$$

زاویه ظلّی

زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره و یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد، زاویه ظلّی می‌نامند.

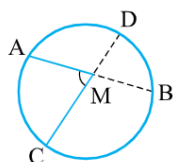
اندازه هر زاویه ظلّی نیز نصف کمان نظیرش می‌باشد، پس در شکل مقابل داریم $\hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$.



زاویه درونی در دایره

اگر دو وتر از دایره‌ای، یکدیگر را درون دایره قطع کنند، زاویه بین آن دو وتر را زاویه درونی دایره می‌نامند.

هر زاویه درونی در دایره برابر است با نصف مجموع دو کمان نظیر آن، یعنی در شکل مقابل داریم:

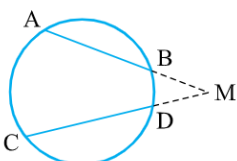


$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

زاویه بیرونی در دایره

هرگاه دو وتر از دایره‌ای در بیرون دایره متقاطع باشند، زاویه بین این دو وتر را زاویه بیرونی دایره می‌نامند.

اندازه هر زاویه بیرونی دایره برابر با قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان نظیر است؛ یعنی در شکل فوق داریم:

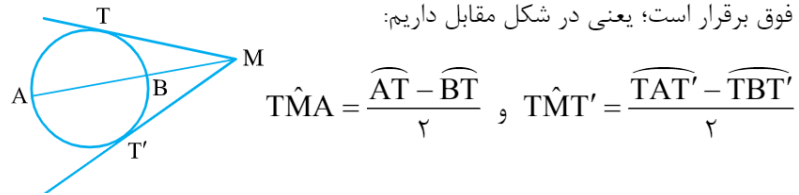


$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$$

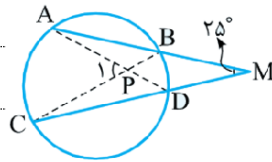


نکته برداری و خلاصه نویسی

در حالت خاصی که یکی از اضلاع زاویه بیرونی و یا هر دو ضلع زاویه بیرونی بر دایره مماس باشند نیز به نوعی رابطه فوق برقرار است؛ یعنی در شکل مقابل داریم:



در شکل زیر $M = 25^\circ$ و $\widehat{AC} = 80^\circ$ است. اندازه زاویه $\hat{P}$ چند درجه است؟



(۱) ۵۵

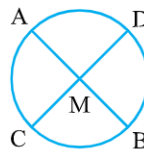
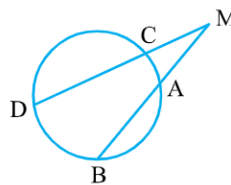
(۲) ۴۵

(۳) ۳۰

(۴) ۴۰

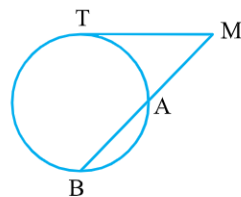
قضیه وترهای متقاطع: هرگاه وترهای AB و CD از دایره‌ای در نقطه M متقاطع باشند (M می‌تواند بیرون یا درون دایره باشد)، آن‌گاه در هر دو شکل داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD$$



و برعکس، اگر $MA \times MB = MC \times MD$ باشد،

آن‌گاه چهار نقطه A، B، C و D بر محیط یک دایره قرار دارند.



قضیه اگر M نقطه‌ای بیرون دایره باشد، چنانچه MT مماس بر دایره

$$MT^2 = MA \times MB$$

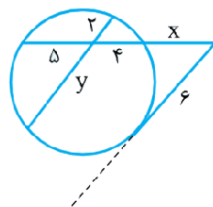
و MB دایره را قطع کند، آن‌گاه:

یعنی طول مماس، واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است.

و برعکس اگر $MT^2 = MA \times MB$ باشد، آن‌گاه دایره‌ای که از سه

نقطه A، B و T می‌گذرد، در نقطه T بر MT مماس است.

در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های روی آن، حاصل $x + y$ کدام است؟



(۱) $3 + 5\sqrt{3}$

(۲) ۱۳

(۳) ۱۲

(۴) $4 + 3\sqrt{3}$

مسئله مهم: اگر از نقطه M، بیرون دایره $C(O, R)$ ، دو مماس

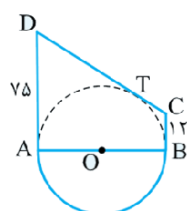
MT و MT' را بر آن رسم کنیم، آن‌گاه:

نکته: $MT = MT'$ ؛ یعنی طول دو مماسی که از یک نقطه بر

دایره رسم می‌شوند، برابر هستند.

نکته: OM نیمساز زاویه بین دو مماس است.

در شکل زیر، AB قطر دایره‌ای به شعاع R و AD و BC بر دایره مماس هستند. با توجه



به اندازه‌های روی شکل، شعاع دایره کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۲۵

(۳) ۳۰

(۴) ۳۵



دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $OO' = d$ باشد. این دو دایره نسبت به هم، پنج حالت می‌توانند داشته باشند.

$$d < R + R'$$

۱ دو دایره متخارج‌اند؛ در این صورت:

$$d = R + R'$$

۲ دو دایره مماس خارج‌اند؛ در این صورت:

$$|R - R'| < d < R + R'$$

۳ دو دایره متقاطع‌اند؛ در این صورت:

$$d = |R - R'|$$

۴ دو دایره مماس داخل‌اند؛ در این صورت:

$$d < |R - R'|$$

۵ دو دایره متداخل‌اند؛ در این صورت:

(توجه داشته باشیم که دو دایره هم‌مرکز، حالت خاصی از دو دایره متداخل است.)

❓ دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ متقاطع‌اند و $OO' = 6$ است. حدود R' کدام است؟

$$18 < R' < 24 \quad (2)$$

$$0 < R' < 18 \quad (1)$$

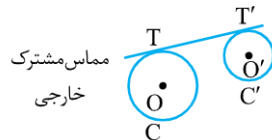
$$6 < R' < 18 \quad (4)$$

$$6 < R' < 12 \quad (3)$$

طول مماس مشترک های دو دایره

تعریف مماس مشترک خارجی

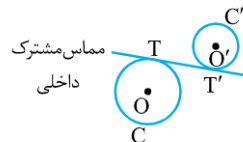
هرگاه خطی بر هر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس باشد و دو دایره در یک طرف این خط قرار داشته باشند، آن‌گاه این خط را مماس مشترک خارجی دو دایره می‌نامند و طول پاره‌خط TT' را طول مماس مشترک خارجی این دو دایره می‌نامند. اگر $OO' = d$ باشد، طول مماس مشترک خارجی از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

طول مماس مشترک داخلی

چنانچه دو دایره در طرفین خط مماس باشند، آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند و طول آن از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$TT'_{\text{داخلی}} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

چند نکته درباره مماس مشترک‌های داخلی و خارجی

۱ اگر دو دایره متداخل باشند، آن‌گاه این دو دایره نه مماس مشترک خارجی دارند و نه مماس مشترک داخلی، زیرا عبارت‌های زیر هر دو رادیکال منفی خواهند بود.

۲ اگر دو دایره مماس داخل باشند، فقط یک مماس مشترک خارجی دارند که طول آن صفر است و این مماس مشترک بر راستای OO' عمود است.

۳ اگر دو دایره متقاطع باشند، فقط دارای دو مماس مشترک خارجی هستند.

۴ اگر دو دایره مماس خارج باشند، آن‌گاه دارای دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی هستند که طول مماس مشترک داخلی صفر است.

۵ اگر دو دایره متخارج باشند، دارای دو مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی هستند.

۶ اگر دو دایره دارای دو مماس مشترک خارجی باشند، آن دو مماس مشترک در نقطه‌ای واقع بر امتداد OO' متقاطع‌اند و چنانچه دو دایره دارای دو مماس مشترک داخلی باشند، آن دو مماس مشترک در نقطه‌ای روی OO' متقاطع‌اند.

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{|R - R'|}{d}$$

۷ اگر زاویه بین دو مماس مشترک خارجی θ باشد، آن‌گاه:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R + R'}{d}$$

و اگر زاویه بین دو مماس مشترک داخلی α باشد، آن‌گاه:



❓ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ مفروض‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ باشد، طول خط‌المركزین دو دایره کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۷ (۳)

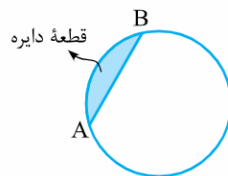
۱۵ (۲)

۱۳ (۱)

قطاع و قطعه در دایره

در درس اول با قطاع در دایره آشنا شدید و دیدید که مساحت قطاعی از دایره به شعاع R و زاویه مرکزی θ رادیان از رابطه $S = \frac{\theta}{2} R^2$ به دست می‌آید.

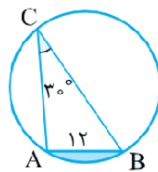
تعریف قطعه در دایره



$$S = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

بخشی از دایره را که محدود به وتر دایره و کمان نظیر همان وتر باشد، قطعه دایره می‌نامند. اگر شعاع دایره، R و زاویه مرکزی نظیر وتر، θ رادیان باشد، آن‌گاه مساحت قطعه دایره از رابطه مقابل به دست می‌آید:

❓ در شکل زیر، مساحت قطعه رنگی کدام است؟



۲۴π (۱)

۳۶π (۲)

۲۴π - ۳۶√۳ (۳)

۳۶π - ۲۴√۳ (۴)

تعریف چند ضلعی محاطی

اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که از همه رأس‌های یک چندضلعی بگذرد، آن چندضلعی را محاطی می‌نامند. در یک چندضلعی محاطی، عمودمنصف‌های تمام اضلاع در یک نقطه هم‌رس‌اند و این نقطه، مرکز دایره محیطی آن چندضلعی است.

تعریف چند ضلعی محیطی

اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که بر تمام اضلاع یک چندضلعی مماس باشد، آن چندضلعی را محیطی می‌نامند. در یک چندضلعی محیطی تمام نیمسازهای زاویه‌های داخلی در یک نقطه هم‌رس‌اند و این نقطه مرکز دایره محاطی آن چندضلعی است.

تذکره مهم اگر محیط یک چندضلعی محیطی برابر $2P$ ، مساحت آن S و شعاع دایره محاطی برابر r باشد، آن‌گاه $r = \frac{S}{P}$.

دایره‌های محاطی و محیطی مثلث

دایره محیطی مثلث

اگر شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر R و $AB = c$ ، $AC = b$ و $BC = a$ باشد، آن‌گاه:

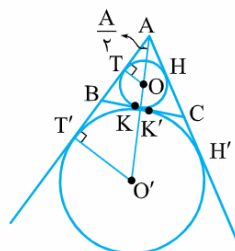
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

دایره محاطی داخلی مثلث

در شکل مقابل دایره‌ای در نقاط H ، T و K بر سه ضلع مثلث مماس است و این دایره درون مثلث قرار دارد. شعاع این دایره $r = \frac{S}{P}$ است.

$$AT = AH = P - a, BT = BK = P - b$$

$$, CK = CH = P - c$$





در شکل فوق، دایره‌ای در نقاط T' ، H' و K' بر سه ضلع مثلث مماس است و این دایره بیرون مثلث قرار دارد. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند و شعاع آن را با r_a نمایش می‌دهند. شعاع این دایره $r_a = \frac{S}{p-a}$ است. (به همین ترتیب $r_b = \frac{S}{p-b}$ و $r_c = \frac{S}{p-c}$)

هم‌چنین: $CH' = CK' = p - b$, $BT' = BK' = p - c$, $AT' = AH' = p$

7 در مثلث ABC ، اندازه زاویه A برابر 60° ، شعاع دایره محاطی داخلی آن ۳ و شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A برابر ۹ است. این دو دایره در نقاط K و K' بر ضلع BC مماس هستند. طول KK' کدام است؟

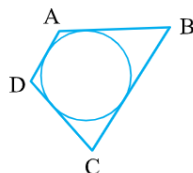
(۴) $2\sqrt{6}$

(۳) $3\sqrt{6}$

(۲) $6\sqrt{2}$

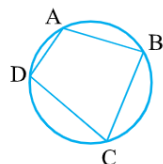
(۱) $6\sqrt{3}$

دایره های محیطی و محاطی چهار ضلعی ها



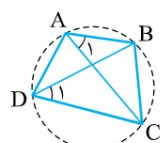
(a) در هر چهارضلعی محیطی، مجموع هر دو ضلع مقابل برابر است با مجموع دو ضلع دیگر و مساوی نصف محیط چهارضلعی هستند و برعکس؛ یعنی در شکل مقابل داریم:

$$AB + CD = AD + BC = \text{نصف محیط } ABCD$$



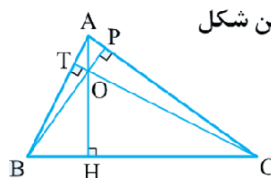
(b) در هر چهارضلعی محاطی، هر دو زاویه مقابل، مکمل یکدیگرند و برعکس؛ یعنی در شکل مقابل داریم:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$



(c) اگر در یک چهارضلعی، زاویه بین یک ضلع و یک قطر برابر با زاویه بین ضلع مقابل با قطر دیگر باشد، آن چهارضلعی محاطی است؛ یعنی اگر در شکل مقابل $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ باشد، آن گاه $ABCD$ محاطی است.

(d) اگر دوزنقه‌ای محاطی باشد، آن دوزنقه، متساوی الساقین است و برعکس، اگر دوزنقه‌ای متساوی الساقین باشد، آن دوزنقه محاطی است.



7 در شکل مقابل، ارتفاع‌های نظیر اضلاع مثلث رسم شده‌اند. در این شکل

چندتا چهارضلعی محاطی وجود دارد؟

(۲) پنج

(۱) چهار

(۴) هشت

(۳) شش

چند ضلعی های منتظم

تعریف چندضلعی منتظم: یک چندضلعی را که تمام زوایای آن با هم برابر و تمام اضلاع آن نیز با هم برابر باشند، چندضلعی منتظم می‌نامند.

تمام چندضلعی‌های منتظم هم محاطی هستند و هم محیطی.

اگر طول ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R را C_n بگیریم، آن گاه:

$$C_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ و } S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

و اگر طول ضلع n ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R را C'_n بگیریم، آن گاه:

$$C'_n = 2R \tan \frac{180^\circ}{n} \text{ و } S'_n = nR^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$$